rung durch einfache Addition zu einer Verwischung der Ergebnisse führen kann. Es wäre also in diesem Zusammenhang zu untersuchen, auf welche Weise die Kernabstoßung in einer ähnlichen Näherung einzuführen ist, wie sie in unserer Rechnung vorliegt. Auf diese Frage soll an einer anderen Stelle eingegangen werden.

Eine weitere Vergleichsmöglichkeit der hier vorliegenden Rechnung mit den von WALSH aufgestellten Forderungen ergibt sich aus dem Verlauf der Koeffizienten in den Eigenfunktionen mit dem Valenzwinkel. So sollte nach WALSH etwa in E_6 der Anteil der 2 s-Funktion mit wachsendem Winkel α abnehmen, was auch durch das Kleinerwerden der Koeffizienten vor 2 s_a in den Tab. 3 – 5 für alle drei Fälle erfüllt ist. Freilich sollte nach dem 1. WALSHschen Postulat die Funktion für die Konfiguration einer spitzen Pyramide nur noch aus dem 2 s_a-Anteil bestehen. Aus der Tatsache, daß dies nicht der Fall ist, ergibt sich die Kritik speziell an dieser Forderung, wie sie in I eingehend durchgeführt wurde. Bei Überprüfung anderer Koeffizientenverläufe läßt sich feststellen, daß diese in der Regel alle den von WALSH geforderten Verlauf nehmen.

Zuletzt wurden, ebenso wie in I, die Verhältnisse für lokalisierte Funktionen untersucht. Da man überraschenderweise die Eigenfunktion zu E_6 als weitgehend am Atom A lokalisiert aus der Rechnung erhält, wird beim Übergang zu einer vollkommen 1 s-freien Funktion energetisch nicht viel geändert. Die Verschiebung der Kurven erfolgt aber in die Richtung der WALSHschen Kurvenverläufe.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. HEISENBERG und Herrn Prof. BIERMANN vom Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik in München für die Erlaubnis zur Benutzung der elektronischen Rechenmaschine G 3 danken. Herrn Dr. H. PREUSS bin ich zu besonders herzlichem Dank verpflichtet für viele gemeinsame Diskussionen. Ebenso danke ich Frau I. FUNKE für die Durchführung der numerischen Rechnungen.

Über die Zuordnung zwischen Invarianzeigenschaften und Erhaltungssätzen

Von HEINZ STEUDEL

Aus der Arbeitsgruppe für Grundlagenforschung der Theorie der Teilchen und Felder
Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin

(Z. Naturforschg. **17 a**, 129—132 [1962]; eingegangen am 14. November 1961)

A systematic classification, based on functional criteria, is given for the local conservation laws. Three kinds of conversation laws and current vectors are distinguished. While those of the first and third kind are well-known, those of the second kind are rarely considered. The method of deriving conservation laws due to NOETHER leads to what we call proper current vectors of the first kind, from which all other current vectors of the first kind may be derived by adding some current vector of the third kind. Between the proper current vectors of the first kind and the invariance properties of the Lagrangian there exists a one-one-correlation. The conservation laws of the second kind are not in this way related to invariance properties, but their significance is strongly restricted by a theorem due to FLETCHER.

The results obtained are used in an attempt to shed some light on the problem of the electromagnetic field in the HEISENBERG non-linear spinor theory.

Nach NOETHER kann man aus der Invarianz der LAGRANGE-Dichte $L\ (x^\mu,\ q_A,\ q_{A,\lambda})$ gegenüber einer kontinuierlichen r-parametrigen Gruppe $\mathfrak{G}_r$ von Transformationen der Koordinaten x^μ und der Feldgrößen q_A r Identitäten ableiten (1. NOETHERscher Satz), die für alle Lösungen der Feldgleichungen die Gestalt von Erhaltungssätzen

$$\partial_\nu\, j^\nu_{(\varrho)} = 0; \quad (\varrho = 1, \dots, r)$$

annehmen. Schon in der Originalarbeit [1] wurde die Umkehrung des ersten NOETHERschen Satzes bewiesen. Allerdings geht die Umkehrbarkeit verloren, wenn man von den NOETHERschen Identitäten zu den Erhaltungssätzen übergeht. Also gibt der NOETHERsche Satz allein noch keine restlos befriedigende Antwort auf die Frage nach der Zuordnung zwischen Invarianzeigenschaften und Erhaltungssätzen, und diese Frage ist erneut zu stellen.

In Abschnitt I wird eine vollständige Klassifizierung der lokalen Erhaltungssätze gegeben. In Abschnitt II wird mit Hilfe des ersten NOETHERschen

[1] E. NOETHER, Göttinger Nachr. **1918**, S. 235.

Satzes die Beziehung zu den Invarianzeigenschaften von L hergestellt. Dabei macht sich eine Verfeinerung der Klassifizierung nötig. Abschnitt III beschäftigt sich mit den Erhaltungssätzen zweiter Art, deren Bedeutung durch einen Satz von FLETCHER [2] stark eingeschränkt wird. In Abschn. IV wird angegeben, unter welchen Bedingungen und in welchem Sinne von einer umkehrbar eindeutigen Zuordnung zwischen Invarianz und Erhaltung gesprochen werden kann. Schließlich werden in Abschn. V die gewonnenen Ergebnisse benützt, um das Problem des elektromagnetischen Feldes in der nichtlinearen Spinortheorie von HEISENBERG und Mitarbeitern zu diskutieren.

I. Klassifizierung der lokalen Erhaltungssätze

Es sei $L\ (x^\mu,\ q_A,\ q_{A,\lambda})$ die LAGRANGE-Dichte eines Variationsproblems. (Der Koordinatenindex μ laufe von 1 bis n, der Index A der Feldgrößen von 1 bis N. Beide sind im folgenden oft weggelassen. Index λ nach Komma bezeichnet die partielle Ableitung nach x^λ.)

Wenn man die LAGRANGEschen Ausdrücke

$$\Lambda^A \equiv \frac{\partial L}{\partial q_A} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{A,\mu}}\right) \tag{1}$$

gleich Null setzt, so hat man die Feldgleichungen.

Unter einem lokalen Erhaltungssatz verstehen wir die Existenz eines Stromvektors $j^\nu(x, q, q_{,\lambda}, \ldots)$, dessen Divergenz für alle Lösungen von $\Lambda^A = 0$ verschwindet.

Die Λ^A sind Funktionen von x, q, $q_{,\lambda}$ und $q_{,\mu\nu}$. Wenn von einer Feldkomponente q_A in den Λ Ableitungen 2. Ordnung vorkommen, so zeichnen wir eine davon aus und nennen sie Q_A. Kommen von q_A nur Ableitungen 1. Ordnung vor, dann soll eine von ihnen Q_A genannt werden. So bekommen wir zu jedem q_A ein Q_A, also insgesamt N. Nun fassen wir (1) als Gleichungssystem für die Q_A auf. Die Funktionaldeterminante sei von Null verschieden (sonst müssen wir die Q_A anders wählen). Dann ist (1) auflösbar nach den Q_A. In den für die Q_A erhaltenen Ausdrücken stehen außer den Λ und den x nur solche q, $q_{,\lambda}$ und $q_{,\lambda\mu}$, die an einem festen Punkt x auch bei Berücksichtigung der Feldgleichungen willkürlich wählbar sind.

Danach können wir in $\partial_\nu j^\nu$ alle Q_A sowie Größen, die sich als Ableitungen der Q_A schreiben lassen, eliminieren. Das gibt

$$\partial_\nu j^\nu = F(\Lambda, \Lambda_{,\lambda}, \ldots, x, q, q_{,\mu}, \ldots)\,. \tag{2}$$

Auch in F kommen nur solche q, $q_{,\mu}, \ldots$ explizit vor, die an einem Punkt willkürlich vorgeschrieben werden können. Damit für j^ν ein Erhaltungssatz gilt, muß $F = 0$ werden, falls die Λ sowie alle ihre Ableitungen verschwinden.

Je nach der Struktur von F unterscheiden wir drei Arten von Erhaltungssätzen:

α) Erhaltungssätze *dritter* Art: $F \equiv 0$.

β) Erhaltungssätze *erster* Art: F ist linear in den Λ. Ableitungen der Λ kommen nicht vor.

γ) Erhaltungssätze *zweiter* Art: F ist eine kompliziertere Funktion der Λ und ihrer Ableitungen.

Zur Rechtfertigung der Bezeichnung ist zu sagen, daß die Erhaltungssätze erster Art, die bei systematischer Anordnung in der Mitte stehen, hinsichtlich ihrer physikalischen Bedeutung an erster Stelle stehen.

Alle Stromvektoren $\quad s^\nu = F^{\nu\mu}{}_{,\mu}$ (3)

mit beliebigen antisymmetrischen $F^{\nu\mu}$ genügen Erhaltungssätzen dritter Art, die gewöhnlich auch als „starke Erhaltungssätze" bezeichnet werden.

II. Der erste Noethersche Satz

Ist die LAGRANGE-Dichte $L\ (x^\mu,\ q,\ q_{,\lambda})$ gegenüber den infinitesimalen Transformationen

$$x' = x + \delta^{(\varrho)} x\,,$$
$$q' = q + \delta^{(\varrho)} q \tag{4}$$

einer endlichen kontinuierlichen Gruppe $\mathfrak{G}_r$ (r = Anzahl der Parameter) invariant bis auf eine Divergenz, d. h.

$$L' = L + \partial_\nu C^\nu_{(\varrho)} + \textit{höhere Glieder}\,, \tag{5}$$

so gelten die r unabhängigen Identitäten

$$-\Lambda^A\, \delta^{(\varrho)}\, q_A \equiv \partial_\mu\, j^\mu_{(\varrho)} \tag{6}$$

mit $\quad \delta^{(\varrho)}\, q \equiv \delta^{(\varrho)}\, q - q_{,\mu}\, \delta^{(\varrho)}\, x^\mu\,,$ (6 a)

$$j^\mu_{(\varrho)} \equiv \frac{\partial L}{\partial q_{,\mu}}\, \delta_0^{(\varrho)}\, q + \delta^\mu_\lambda\, L\, \delta^{(\varrho)}\, x^\lambda - C^\mu_{(\varrho)} \tag{6 b}$$

$$[\delta_0^{(\varrho)} q \equiv \delta^{(\varrho)} q - q_{,\lambda}\, \delta^{(\varrho)} x^\lambda]\,.$$

Die Umkehrung dieses Satzes gilt in folgendem Sinn: Läßt sich eine homogene lineare Funktion der Λ^A als Divergenz ausdrücken [Gl. (6)], so kann man eine infinitesimale Transformation (4) finden

[2] J. G. FLETCHER, Rev. Mod. Phys. **32**, 65 [1960].

mit der Eigenschaft, daß L gegenüber dieser Transformation invariant ist bis auf eine Divergenz. Durch Integration erhält man daraus eine einparametrige Schar von Transformationen, die gleichfalls L invariant lassen. Die Gesamtheit aller auf diese Weise erhaltenen Transformationen ist eine kontinuierliche Gruppe.

Die Beweise sind in den unter [1] und [3] zitierten Arbeiten zu finden.

Wir halten fest: Aus einer Invarianzeigenschaft von L läßt sich ein Stromvektor $j^{\nu}_{(\varrho)}$ ableiten, der einem Erhaltungssatz erster Art genügt. Durch Addition beliebiger Stromvektoren dritter Art $s^{\nu}_{(\sigma)}$ (σ soll ein Parameter sein) läßt sich eine ganze *Familie* von Stromvektoren erster Art ableiten:

$$j^{\mu}_{(\varrho,\sigma)} = j^{\mu}_{(\varrho)} + s^{\mu}_{(\sigma)} \,. \tag{7}$$

Stromvektoren $j^{\mu}_{(\varrho)}$, die unmittelbar in der Gestalt (6) erscheinen, wollen wir *eigentliche* Stromvektoren erster Art nennen. Die $j^{\mu}_{(\varrho,\sigma)}$ dagegen nennen wir *erweiterte* Stromvektoren erster Art, falls $s^{\mu}_{(\sigma)} \not\equiv 0$.

Dann können wir unter Beachtung der Umkehrung des ersten NOETHERschen Satzes sagen: Zwischen den Invarianzeigenschaften von L und den eigentlichen Stromvektoren erster Art besteht eine umkehrbar eindeutige Zuordnung. Die Menge der Stromvektoren erster Art zerfällt in Familien, denen genau je ein eigentlicher Stromvektor erster Art angehört.

III. Stromvektoren zweiter Art

Wir wollen ein einfaches Prinzip angeben, wonach sich Stromvektoren zweiter Art konstruieren lassen:

Man konstruiere zu L ein allgemeineres Problem mit der LAGRANGE-Dichte $\hat{L}$, allgemeiner in dem Sinne, daß jede Lösung zu $\hat{L}$ auch Lösung zu L ist, nicht aber umgekehrt. Aus Invarianzeigenschaften von $\hat{L}$ leite man nach dem NOETHERschen Schema Erhaltungssätze ab. Diese gelten dann natürlich auch für alle Lösungen von L, sind hier aber i. allg. Erhaltungssätze zweiter Art.

Beispiel: Die LAGRANGE-Dichte

$$L = \tfrac{1}{2}\, \overline{\psi}\, \gamma^{\mu} \overleftrightarrow{\partial}_{\mu}\, \psi + \varkappa\, \overline{\psi}\, \psi \qquad [\overleftrightarrow{\partial}_{\mu} \equiv \overrightarrow{\partial}_{\mu} - \overleftarrow{\partial}_{\mu}]$$

führt auf die DIRAC-Gleichung

$$\Lambda \equiv (\gamma^{\mu}\, \partial_{\mu} + \varkappa)\, \psi = 0 \,.$$

L ist invariant gegen Eichtransformation, woraus der Erhaltungssatz für den Stromvektor $j^{\nu} = \overline{\psi}\, \gamma^{\nu}\, \psi$ folgt. Aus der DIRAC-Gleichung läßt sich die KLEIN–GORDON-Gleichung gewinnen, die aus der LAGRANGE-Dichte

$$\hat{L} = \tfrac{1}{2}\, \partial_{\mu}\, \overline{\psi}\, \partial^{\mu}\, \psi - \varkappa^2\, \overline{\psi}\, \psi$$

abgeleitet werden kann. $\hat{L}$ ist ebenfalls eichinvariant. Der zugehörige Stromvektor ist $\hat{j}^{\nu} = \overline{\psi}\, \overleftrightarrow{\partial}^{\nu}\, \psi$. Die entsprechende Identität ist

$$\partial_{\nu}\, (\overline{\psi}\, \overleftrightarrow{\partial}^{\nu}\, \psi) \equiv \overline{\psi}\, (-\gamma^{\nu}\, \overleftarrow{\partial}_{\nu} + \varkappa)\, \Lambda - \overline{\Lambda}\, (\gamma^{\nu}\, \overrightarrow{\partial}_{\nu} + \varkappa)\, \psi \equiv F.$$

$\hat{j}^{\nu}$ ist also ein Stromvektor zweiter Art, j^{ν} ein eigentlicher Stromvektor erster Art.

Bei FLETCHER [2] findet sich ein Satz, der in unserer Terminologie wie folgt zu formulieren ist:

Es sei vorausgesetzt, daß die Q_A (siehe I) sich so auswählen lassen, daß sie in den Λ nur linear vorkommen und die Auflösbarkeit von (1) nach den Q_A gewährleistet ist.

Dann ist jeder Stromvektor zweiter Art gleich einem Stromvektor erster Art bis auf einen Summanden, der homogen linear in den Λ^A und deren Ableitungen ist, also für alle Lösungen der Feldgleichungen verschwindet.

Stromvektoren, die für alle Lösungen der Feldgleichungen übereinstimmen, sind physikalisch als identisch anzusehen. In diesem Sinne können wir sagen, daß die Stromvektoren zweiter Art, sofern die FLETCHERschen Bedingungen erfüllt sind, nicht über die erster Art hinausführen.

In unserem Beispiel (DIRAC-Gleichung) haben wir die Identität

$$-\frac{1}{2\,\varkappa}\, \hat{j}^{\nu} \equiv j^{\nu} - s^{\nu} + 2\, (\overline{\Lambda}\, \gamma^{\nu}\, \psi + \overline{\psi}\, \gamma^{\nu}\, \Lambda) \,, \tag{8}$$

die als GORDONsche Zerlegung [4] bekannt ist. Hierbei wird der Stromvektor dritter Art

$$s^{\nu} = \frac{1}{4\,\varkappa}\, \partial_{\mu}\, [\overline{\psi}\, (\gamma^{\mu}\, \gamma^{\nu} - \gamma^{\nu}\, \gamma^{\mu})\, \psi]$$

als *Polarisationsstrom* bezeichnet, während man j^{ν} *Gesamtstrom* und $-\frac{1}{2\,\varkappa}\, \hat{j}^{\nu}$ *Bahnstrom* nennt.

In den bekannten klassischen Feldtheorien sind die Voraussetzungen des Satzes von FLETCHER erfüllt, so daß die Erhaltungssätze zweiter Art nichts Neues liefern. Allerdings kann das Operieren mit Erhaltungssätzen zweiter Art unter Umständen sinnvoll oder zumindest bequem sein.

Die Übertragung des NOETHERschen Formalismus auf die Quantenfeldtheorie ist zwar unzureichend

[3] E. BESSEL-HAGEN, Math. Ann. **84**, 258 [1921].

[4] W. GORDON, Z. Phys. **50**, 630 [1928].

fundiert, scheint jedoch durch den erzielten Erfolg weitgehend gerechtfertigt zu sein. Hingegen ist unschwer einzusehen, daß eine Übertragung des Satzes von FLETCHER auf Schwierigkeiten stoßen wird, denn die vorausgesetzte Auflösbarkeit nach den Q_A wird wesentlich problematischer, wenn wir mit Operatoren zu tun haben. Deshalb kann damit gerechnet werden, daß den Erhaltungssätzen zweiter Art in der Quantenfeldtheorie eine größere Bedeutung zukommen könnte. Vielleicht bietet sich hier eine Möglichkeit, Erhaltungssätze einzuführen, die kein klassisches Analogon besitzen.

IV. Bedingungen einer eindeutigen Zuordnung

Aus dem Vorhergehenden ergibt sich, daß zwischen Invarianzeigenschaften und Erhaltungssätzen bzw. den entsprechenden Stromvektoren eine umkehrbar eindeutige Zuordnung besteht, wenn

1. die Feldgleichungen den Voraussetzungen des Satzes von FLETCHER genügen,

und wenn man festlegt, daß

2. Stromvektoren, die für $\Lambda \equiv 0$ ineinander übergehen, identifiziert werden, und daß

3. zwischen Stromvektoren derselben Familie nicht unterschieden wird.

V. Anwendung auf die Heisenbergsche nichtlineare Spinortheorie

Wenn man in der HEISENBERGschen Theorie [5–7]

$$F^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2\,i}\,X(\Gamma^\mu \Gamma^\nu - \Gamma^\nu \Gamma^\mu)X \qquad (9)$$

als Tensor des elektromagnetischen Feldes deutet, so gilt für den elektrischen Strom

$$s^\nu = F^{\nu\mu}{}_{,\mu} \qquad (10)$$

ein Erhaltungssatz dritter Art. [Gl. (9) ist eine sinngemäße Übertragung aus der nichtlinearen Spinortheorie von HEISENBERG in ihrer früheren Form [8]. Für die neuere HEISENBERG-Gleichung liegt eine Theorie des elektromagnetischen Feldes noch nicht vor.] Es ist demnach grundsätzlich unmöglich, s^ν nach dem NOETHERschen Schema aus einer Invarianzeigenschaft von L abzuleiten.

In Anm. [5] wird die elektrische Ladung Q aufgespalten in zwei Anteile

$$Q = I_3 + \tfrac{1}{2}\,l_Q\,, \qquad (11)$$

wobei I_3 aus der Eichinvarianz resultiert, während l_Q mit einer Skalentransformation in Zusammenhang gebracht wird. (Auf die Problematik dieser Skalentransformation wird in anderem Zusammenhang hingewiesen [9].) Für I_3 gilt ein eigentlicher Erhaltungssatz erster Art, für Q ein Erhaltungssatz dritter Art. Dann gilt für l_Q ein erweiterter Erhaltungssatz erster Art. Und zwar gehört l_Q zu derselben Familie wie I_3. (Der Übergang von den lokalen zu den integralen Erhaltungssätzen ist bei hinreichenden Konvergenzbedingungen stets möglich. Wir übertragen deshalb die für Stromvektoren eingeführte Terminologie auch auf die integralen Erhaltungsgrößen bzw. Quantenzahlen.) Folglich kann l_Q niemals aus einer weiteren Invarianzeigenschaft von L abgeleitet werden.

Herrn Dr. STRAUSS danke ich für wertvolle Diskussionen und für sein förderndes Interesse am Zustandekommen dieser Arbeit.

[5] H.-P. DÜRR, W. HEISENBERG, H. MITTER, S. SCHLIEDER u. K. YAMAZAKI, Z. Naturforschg. **14 a**, 441 [1959].
[6] H.-P. DÜRR, Z. Naturforschg. **16 a**, 327 [1961].
[7] H.-P. DÜRR u. W. HEISENBERG, Z. Naturforschg. **16 a**, 726 [1961].
[8] R. ASCOLI u. W. HEISENBERG, Z. Naturforschg. **12 a**, 177 [1957].
[9] H. STEUDEL, Z. Naturforschg. **17 a**, 133 [1962]; nachstehend.